Techniques de base

9. Fonctions affines

L'essentiel

- Une fonction f telle que $f(x) = ax + b$ est une fonction affine.
- $f(x)$ est l'image de x par f et x est l'antécédent de $f(x)$ par f.

Exemple :
La fonction $f : x \longmapsto -3x + 4$ est une fonction affine de coefficients $a = -3$ et $b = +4$.
On a $f(5) = -3 \times 5 + 4 = -11$: **le nombre -11 est l'image de 5 par f et 5 est l'antécédent de -11 par f.**

- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite sécante à l'axe des ordonnées, d'équation $y = ax + b$.
- a est le coefficient directeur de la droite et b est son ordonnée à l'origine.
- Soit f une fonction affine, x_1 et x_2 deux réels distincts.

Le coefficient a de f est donné par : $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Exemple :
Déterminer la fonction affine g telle que $g(1) = 3$ et $g(3) = 7$.
g est une fonction affine donc elle s'écrit sous la forme : $g(x) = ax + b$.
D'après la propriété des accroissements, on a :
$a = \dfrac{g(1) - g(3)}{1 - 3}$, soit $a = \dfrac{3 - 7}{1 - 3} = \dfrac{-4}{-2} = 2$;
d'où $g(x) = 2x + b$. Or $g(1) = 2 \times 1 + b$ et $g(1) = 3$. On a $2 + b = 3$, donc $b = 3 - 2 = 1$.
La fonction affine est $g : x \longmapsto 2x + 1$.

Test

1 **QCM** Pour chaque question, trouver **toutes** les bonnes réponses.

1. Par quelle fonction le nombre 3 a-t-il pour image -2 ?	**a.** $x \longmapsto -2x + 4$	**b.** $x \longmapsto -x + 2$	**c.** $x \longmapsto 3x - 11$	**d.** $x \longmapsto \dfrac{-1}{3}x$
2. Par quelle fonction le nombre -4 a-t-il pour antécédent -5 ?	**a.** $x \longmapsto \dfrac{5}{4}$	**b.** $x \longmapsto \dfrac{1}{3}x - \dfrac{7}{3}$	**c.** $x \longmapsto -5x + 4$	**d.** $x \longmapsto 3x + 7$
3. Soit $f : x \longmapsto ax + b$ une fonction affine telle que $f(3) = 4$ et $f(-2) = -6$. On a alors …	**a.** $a = \dfrac{f(-2) - f(3)}{-2 - 3}$	**b.** $a = 2$	**c.** $a = \dfrac{f(3) - f(-2)}{3 + 2}$	**d.** $a = \dfrac{-6 - 4}{-2 - 3}$
4. Soit f une fonction affine telle que $f(2) = 10$ et $f(0) = -4$. On a …	**a.** $f(x) = -5x$	**b.** $f(x) = 7x - 4$	**c.** $f(x) = -4$	**d.** $f(x) = 10x - 4$

Applications directes

2 La représentation graphique d'une fonction f est une droite D qui passe par les points $A(-1 ; 3)$ et $B(3 ; 1)$.
1. Déterminer l'expression algébrique de la fonction f.
2. Déterminer l'image de 5 par f.
Que peut-on en déduire pour le point C de D d'abscisse 5 ?
3. La droite D passe-t-elle par les points $E(21 ; -8)$ et $F(33 ; -13)$? Justifier les réponses.

3 Représenter graphiquement les deux fonctions affines f et g suivantes dans un même repère :
a. $f : x \longmapsto -2x + 4$; **b.** $g : x \longmapsto 0{,}5x - 1$.

4 Soit la fonction f définie par : $f : x \longmapsto -2x + 4$.
Déterminer les antécédents de 0 et de 17 par f.

5 On considère les fonctions f et g définies par :
$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = 8 - 1{,}6x.$$
1. Construire les représentations graphiques de f et g dans un repère orthonormé (unité 1 cm) pour $0 \leqslant x \leqslant 5$.
2. Utiliser ces graphiques pour déterminer un encadrement par deux nombres entiers consécutifs de la solution de l'équation $f(x) = g(x)$; laisser apparents les traits utilisés pour répondre à cette question.

Techniques de base

9. Fonctions affines

Corrigés

Test

1 1. On a : $-2 \times 3 + 4 = \mathbf{-2}$; $-3 + 2 = 1$; $3 \times 3 - 11 = \mathbf{-2}$; $\dfrac{-1}{3} \times 3 = -1$: réponses **a.** et **c.**

2. Comme $\dfrac{1}{3} \times (-5) - \dfrac{7}{3} = -4$, -4 a pour antécédent -5 par la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3}x - \dfrac{7}{3}$: réponse **b.**

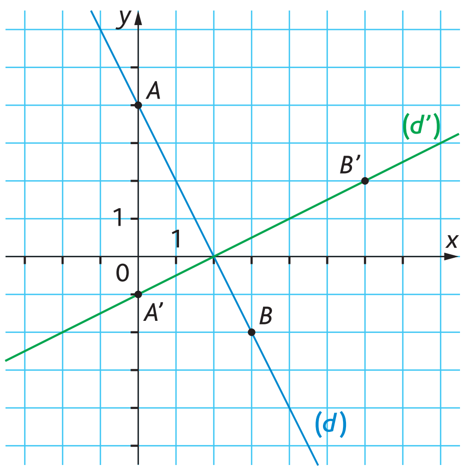
3. On a : $a = \dfrac{f(-2) - f(3)}{-2 - 3}$, $a = 2$, $a = \dfrac{f(3) - f(-2)}{3 + 2}$ et $a = \dfrac{-6 - 4}{-2 - 3}$: réponses **a.**, **b.**, **c.**, **d.**

4. Seule l'expression $f(x) = 7x - 4$ permet d'avoir $f(2) = 10$ et $f(0) = -4$: réponse **b.**

Applications directes

2 1. La droite D représente une fonction **affine.**
On a donc $f(x) = ax + b$ avec $f(-1) = 3$ et $f(3) = 1$.
On a $a = \dfrac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \dfrac{1 - 3}{4} = \dfrac{-2}{4} = -0{,}5$.
$f(x) = -0{,}5x + b$ avec $-0{,}5 \times 3 + b = 1$,
d'où $b = 1 + 1{,}5 = 2{,}5$. On a $\mathbf{f(x) = -0{,}5x + 2{,}5}$.
2. L'image de 5 par f est $f(5) = -0{,}5 \times 5 + 2{,}5 = 0$.
C est à l'intersection de D et de l'axe des abscisses.
3. $f(21) = -0{,}5 \times 21 + 2{,}5 = -8$ donc $\mathbf{E(21 ; -8)}$ **est sur** $\mathbf{D}$. $f(33) = -0{,}5 \times 33 + 2{,}5 = -14 \neq -13$, donc $\mathbf{F(33 ; -13)}$ **n'est pas sur** $\mathbf{D}$.

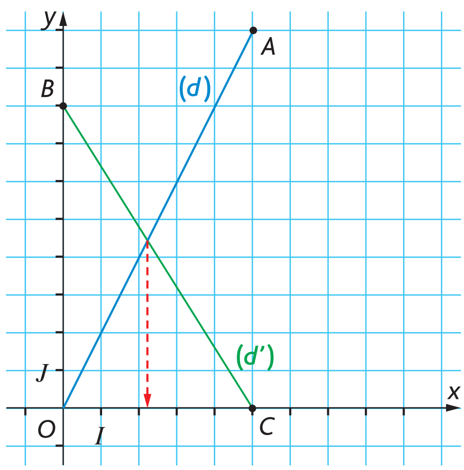
3 a. f est une fonction affine donc elle est représentée par une droite (d).



$f(0) = -2 \times 0 + 4 = 4$; le point $A(0 ; 4)$ est sur (d).
$f(3) = -2 \times 3 + 4 = -2$; le point $B(3 ; -2)$ est sur (d).
b. g est une fonction affine donc elle est représentée par une droite (d').
$g(0) = 0{,}5 \times 0 - 1 = -1$; le point $A'(0 ; -1)$ est sur (d').
$g(6) = 0{,}5 \times 6 - 1 = 2$; le point $B'(6 ; 2)$ est sur (d').

4 x antécédent de 0 par $f \Leftrightarrow f(x) = 0$
$\Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{2}$.
x antécédent de 17 par $f \Leftrightarrow f(x) = 17$
$\Leftrightarrow -2x + 4 = 17 \Leftrightarrow x = \mathbf{-6{,}5}$.

5 1. f est une fonction linéaire donc elle est représentée par une droite (D) passant par l'origine du repère.
$f(5) = 10$ donc $A(5 ; 10)$ est sur (D).
g est une fonction affine donc elle est représentée par une droite (D').
$g(0) = 8 - 1{,}6 \times 0 = 8$ donc $B(0 ; 8)$ est sur (D').
$g(5) = 8 - 1{,}6 \times 5 = 0$ donc $C(8 ; 0)$ est sur (D').
Comme x est compris entre 0 et 5, on ne dessine que les segments $[OA]$ et $[BC]$.



2. La solution de $f(x) = g(x)$ est l'abscisse du point d'intersection des droites (D) et (D').
Graphiquement, on a $\mathbf{2 < x < 3}$.